جبر (2) عملي

المحاضرة الثامنة (عملي) والأخيرة

بفرض أن $A = \{ v_1 = (2,1) , v_2 (3,1) \}$ قاعدة للفضاء الشعاعي R^2 والمطلوب

- أوجد القاعدة الثنوية $A^* = \{T_1, T_2\}$ للفضاء الشعاعي $(R^2)^*$

- اكتب الشكل الخطي التالي

$T(x,y) = -2x + 3y$ من $(R^2)^*$ كتركيب خطي لعناصر القاعدة A

الحل:

$$A^* = \{ T_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y , T_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y \}$$

$$T_1(v_1) = T_1(2,1) = 2\alpha_1 + \beta_1 = 1$$

$$T_1(v_2) = T_1(3,1) = 3\alpha_1 + \beta_1 = 0$$

بالحل المشترك نجد أن $\alpha_1 = -1$ $\beta_1 = 3$

$$\Rightarrow T_1 = -x + 3y$$

$$T_2(v_1) = T_2(2,1) = 2\alpha_2 + \beta_2 = 0$$

$$T_2(v_2) = T_2(3,1) = 3\alpha_2 + \beta_2 = 1$$

بالحل المشترك نجد أن $\alpha_2 = 1$ $\beta_2 = -2$

$$\Rightarrow T_2 = x - 2y \Rightarrow A^* = \{ T_1 = -x + 3y , T_2 = x - 2y \}$$

$$T(x,y) = -2x + 3y$$

$$T = T(v_1) T_1 + T(v_2) T_2$$

$$T(v_1) = T(2,1) = -1$$

$T(v_2) = T(3,1) = 3$

$\Rightarrow T = T_1 + 3T_2$

تمرين: ((سؤال دورة))

لتكن $A^* = \{T_1(x,y) = 4x + 3y \;,\; T_2(x,y) = 3x - 2y\}$ قاعدة ثنائية لـ $(R^2)^*$ والمطلوب:

1. أوجد القاعدة A لـ R^2 والتي قاعدتها الثنوية A^*

2. اكتب الشكل الخطي $P(x,y) = -7x + 3y$ بدلالة أشعة القاعدة A^*

3. اكتب الشعاع $v = (-7, 9)$ بدلالة أشعة القاعدة A

الحل:

1. لتكن $A = \{v_1 = (x_1, y_1) \;,\; v_2 = (x_2, y_2)\}$

$T_1(v_1) = 1 \Rightarrow T_1(x_1, y_1) = 4x_1 + 3y_1 = 1$ ①

$T_2(v_1) = 0 \Rightarrow T_2(x_1, y_1) = 3x_1 - 2y_1 = 0$ ②

بالحل المشترك من ② لدينا $x_1 = \frac{2}{3} y_1$

نعوض في ①: $\frac{8}{3} y_1 + \frac{9}{3} y_1 = 1$

$\Rightarrow \frac{17}{3} y_1 = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{17}$

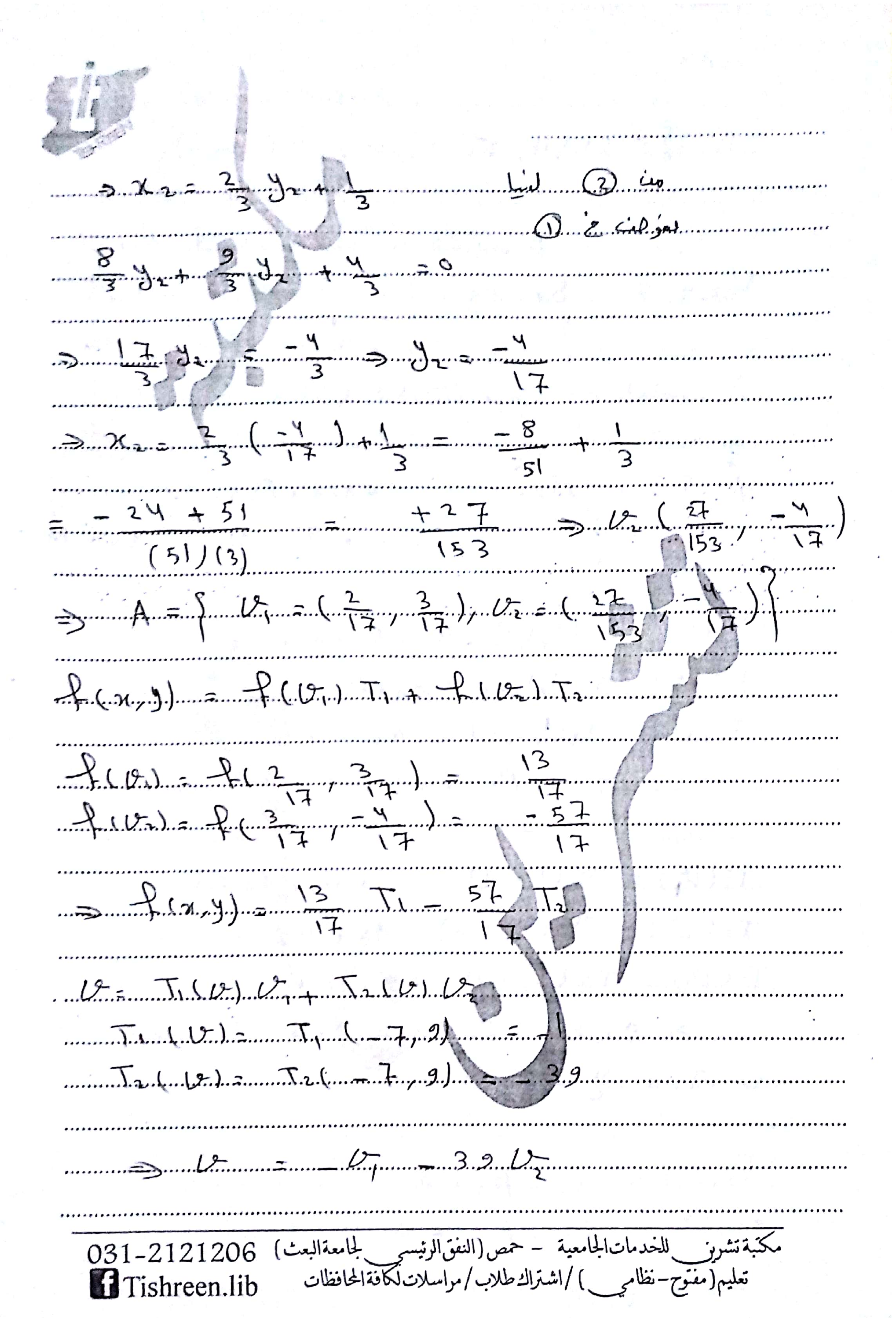
$x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{17} = \frac{2}{17}$

$\Rightarrow v_1 = \left(\frac{2}{17}, \frac{3}{17}\right)$

بالحل المشترك:

$T_1(v_2) = 0 \Rightarrow T_1(x_2, y_2) = 4x_2 + 3y_2 = 0$

$T_2(v_2) = 0 \Rightarrow T_2(x_2, y_2) = 3x_2 - 2y_2 = 1$



من ② لدينا $\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3}$

نعوض في ①

$$\frac{8}{3} y_2 + \frac{9}{3} y_2 + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{17}{3} y_2 = \frac{-4}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{-4}{17}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{-4}{17}\right) + \frac{1}{3} = \frac{-8}{51} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{-24 + 51}{(51)(3)} = \frac{+27}{153} \Rightarrow v_2\left(\frac{27}{153}, \frac{-4}{17}\right)$$

$$\Rightarrow A = \left\{ v_1 = \left(\frac{2}{17}, \frac{3}{17}\right), v_2 = \left(\frac{27}{153}, \frac{-4}{17}\right) \right\}$$

$$f(x,y) = f(v_1) T_1 + f(v_2) T_2$$

$$f(v_1) = f\left(\frac{2}{17}, \frac{3}{17}\right) = \frac{13}{17}$$

$$f(v_2) = f\left(\frac{3}{17}, \frac{-4}{17}\right) = \frac{-57}{17}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{13}{17} T_1 - \frac{57}{17} T_2$$

$$v = T_1(v) v_1 + T_2(v) v_2$$

$$T_1(v) = T_1(-7, 9) = -1$$

$$T_2(v) = T_2(-7, 9) = -39$$

$$\Rightarrow v = -v_1 - 39 v_2$$

تمرين: لتكن لدينا الأساس

$A = \{ v_1 (1,1,1) , v_2 (1,1,0) , v_3 (1,0,0) \}$

لـ R^3 والمطلوب

1- أوجد الأساس الثنوي A^* للأساس A

2- اكتب التطبيق الخطي $h(x,y,z) = 3x - 3y + 4z$ كتركيب خطي لعناصر القاعدة A^*

3- اكتب الشعاع $v = (2,4,5)$ كتركيب خطي لعناصر القاعدة A

الحل:

$A^* = \{ T_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z , T_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z , T_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \}$

$T_1(v_1) = T_1(1,1,1) = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1$

$T_1(v_2) = T_1(1,1,0) = \alpha_1 + \beta_1 = 0$

$T_1(v_3) = T_1(1,0,0) = \alpha_1 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = 0$ و $\gamma_1 = 1$

$\Rightarrow T_1 = z$

$T_2(v_1) = T_2(1,1,1) = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0$

$T_2(v_2) = T_2(1,1,0) = \alpha_2 + \beta_2 = 1$

$T_2(v_3) = T_2(1,0,0) = \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0 , \beta_2 = 1 , \gamma_2 = -1$

$\Rightarrow T_2 = y - z$

$T_3(v_1) = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0$

$T_3(v_2) = \alpha_3 + \beta_3 = 0$

$T_3(v_3) = \alpha_3 = 1$

$\Rightarrow \beta_3 = -1 ، \alpha_3 = 1 ، \gamma_3 = 0$

$\Rightarrow T_3 = x - y$

$\Rightarrow A^* \{ T_1 = z , T_2 = y - z , T_3 = x - y \}$

(2)

$h(x, y, z) = h(v_1) T_1 + h(v_2) T_2 + h(v_3) T_3$

$h(v_1) = 9 \quad h(v_2) = 5 \quad h(v_3) = 8$

$h = 9T_1 + 5T_2 + 8T_3$

(3)

$v = T_1(v) v_1 + T_2(v) v_2 + T_3(v) v_3$

$T_1(v) = 5 ، T_2(v) = -1 ، T_3 = -2$

$\Rightarrow v = 5v_1 - v_2 - 2v_3$

وظيفة الحل بالطلب

((انتهت المحاضرة الأخيرة))

((مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح))

<< إعداد: فاطمة الشميس >>